



TITLE:

反応-拡散の相互作用と非線形拡散 (第6回生物数学の理論とその応用)

AUTHOR(S):

村川, 秀樹

CITATION:

村川, 秀樹. 反応-拡散の相互作用と非線形拡散 (第6回生物数学の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 2010, 1704: 187-194

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170032>

RIGHT:

反応-拡散の相互作用と非線形拡散

富山大学大学院理工学研究部 (理学) 村川 秀樹 (Hideki Murakawa)
Graduate School of Science and Engineering for Research,
University of Toyama

1 はじめに

集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ($N \in \mathbf{N}$) を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな有界領域とし, ν を境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法ベクトルとする. また, T を正の定数, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ は与えられた関数であるとする. 初期値 $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0n}): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ が与えられたときに

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta \beta(z) + f(z) & \text{in } Q := \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \beta(z)}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

を満たす $z = (z_1, \dots, z_n): \bar{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$) を求める初期値境界値問題を考える. 問題 (1) を見ての通り, この問題には, 拡散項に非線形関数 β_i が含まれている. この非線形性の違いにより, この問題は理工学分野における非常に多くの重要な問題を記述している. 例えば, $n = 1$ とし $\beta_1(z_1)$ がある区分的線形なリプシッツ連続関数のときは, 氷の融解・水の凝固現象を記述する古典的ステファン問題を表している. また, $\beta_1(z_1) = z_1^m$ ($m > 1$) のとき, 問題 (1) は多孔質媒体中を流れる流体の流れ現象を記述している. これらの問題は, β の微分が 0 になる場合を含んでおり, 退化放物型問題と呼ばれている. 拡散が退化することにより, 自由境界が現れ, そのことが問題を特徴付けている. 問題 (1) において, β_i は z_j ($j \neq i$) にも依存していることに注意していただきたい. この様な場合の拡散は交差拡散と呼ばれ, そのことが興味深い現象を引き起こす.

本研究では, これら非線形拡散問題の解が拡散が線形である半線形反応拡散系の解により近似されることを示す. このことは, 半線形反応拡散系に比べて格段に豊富な構造を内包していると思われる退化拡散や交差拡散を含む準線形反応拡散系のメカニズムが, 実は線形拡散と単純な反応の相互作用によって表現されることを示している. 退化拡散問題についての研究は文献 [7, 8] に譲り, 本稿では交差拡散系に焦点を絞ることとする.

交差拡散系は個体群生態学における数理モデルの中にしばしば現れる. 個体群生態学における典型的な問題として Lotka-Volterra 競争拡散系が挙げられる. その系は (1) において, $\beta_i(z) = d_i z_i$, $f_i(z) = \left(g_{i0} - \sum_{j=1}^n g_{ij} z_j \right) z_i$ としたものである. ここで, z_i は i 番目の生物種の個体数密度, d_i

は拡散係数, g_{i0} は内的自然増加率, g_{ii} は種内競争係数, g_{ij} ($i \neq j, j \neq 0$) は種間競争係数を表している. この問題は, その場所における同種や異種の密度が高いと個体数が減るという形になっている. しかし, 生物の共生・競争では, 密度が高いと不快であるため, その場所から離れるという方が自然であるかもしれない. Lotka-Volterra 系の解の定性的性質についてはかなり多くの研究がなされているが, この問題はそういった, 動的な干渉作用を含んでいない. 場所における相互作用ではなく, 動的な干渉作用を記述するものとして, Kerner [6] は次の交差拡散系を提案した.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = a_1 \Delta z_1 + b_{12} \Delta z_2 + f_1(z_1, z_2), \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = a_2 \Delta z_2 + b_{21} \Delta z_1 + f_2(z_1, z_2). \end{cases} \quad (2)$$

ここで, a_i ($i = 1, 2$) は非負定数であり, b_{12} と b_{21} は実数である. $b_{ij} > 0$ は, i 番目の種が j 番目の種が密に集まった場所を避ける傾向を示しており, $b_{ij} < 0$ は j 番目の種が集まった方向に向かっていく傾向を表している. Gurtin [1] はこの交差拡散の効果について研究し, その効果が生物種の棲み分けを引き起こすことを示した.

交差拡散系 (1) の他の例は重定, 川崎, 寺本 [12] により提案された 2 種個体群の分散的移動を記述する次のモデルである.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \Delta [(a_1 + b_1 z_1 + c_1 z_2) z_1] + (g_{10} - g_{11} z_1 - g_{12} z_2) z_1, \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = \Delta [(a_2 + b_2 z_2 + c_2 z_1) z_2] + (g_{20} - g_{21} z_1 - g_{22} z_2) z_2. \end{cases} \quad (3)$$

ここで, a_i, b_i, c_i, g_{ij} ($i = 1, 2, j = 0, 1, 2$) は非負定数である. i 番目の種の分散率 $a_i + b_i z_i + c_i z_j$ ($j \neq i$) は密度 z_i, z_j に比例して増加するという形式をとっている. 交差拡散の項は j 番目の種が高密度に棲む場所では個体間に働く干渉作用が強く, i 番目の種の各個体はその場から分散する傾向を強めることを示している. この効果により空間的な棲み分けが起こることが知られている.

個体群生態学には他にも興味深い交差拡散系の例がある. 例えば, Kadota と Kuto [5] により研究されている次の捕食者-被食者系の問題である.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \Delta [(1 + b_1 z_2) z_1] + (g_{10} - g_{11} z_1 - g_{12} z_2) z_1, \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = \Delta \left[a_2 + \left(\frac{1}{1 + c_2 z_1} \right) z_2 \right] + (g_{20} + g_{21} z_1 - g_{22} z_2) z_2. \end{cases}$$

この系では, 被食者の分散率は (3) と同様なタイプであるが, 捕食者の分散率は分数の形になっている. これは, 餌が多くなると捕食者の個体群圧が低くなることを示しており, 結果として, 餌が多く集まっている場所に捕食者が集まっていく効果を表している. この様に, 式 (1) は興味深い問題を多く含んでいる.

飯田等 [2] は問題 (3) において $a_1, a_2, c_2 > 0, b_1 = b_2 = c_1 = 0$ という場合を取り扱った. 交差拡散のメカニズムの理解のために, 彼らは異種が高密度に棲む場所を避ける方法について, 交差拡散とは異なるものを考えた. 結果として, ある半線形反応拡散系を提出し, その解がパラメータに対して一様有界であることを仮定したときに, その解が交差拡散系の解に収束することを示した.

さらに、彼らは交差拡散誘導不安定性と、対応する反応拡散系のチューリング不安定性との関係についても議論している。飯田と二宮 [4] はより一般的な 2 成分弱結合系を取り扱った。ここで、弱結合系とは系 (1) において β_1 が z_2 に依存しない問題である。彼らの目的は「半線形反応拡散系の構造がどれだけ豊かなか」という問いに答えを与えるということであった。彼らは、飯田等 [2] の反応拡散系を拡張した系を弱結合交差拡散系の近似として提案した。与えられた関数が十分に滑らかで、交差拡散系と反応拡散系の滑らかな解が存在し、それらの解がパラメータに関して一様有界であることを仮定した上で、その反応拡散系の解が弱結合交差拡散系の解に収束することを示した。初期値など与えられた関数の滑らかさを仮定すれば、反応拡散系の滑らかな解が存在するということは良いであろう。しかし、その極限が滑らかであるかどうかは一般的にはわからない。反応拡散系の構造という、上記の問いに答えるには仮定が強すぎるように思われる。また、反応拡散の相互作用と非線形拡散の関係を調べる研究において、系 (1) における反応項は本質的ではない。弱結合系においてこの項を無視すると、問題は各方程式を順番に解いていく問題となる。したがって、弱結合系の解析は 1 つの非線形拡散方程式の解析へと帰着される。実際に飯田等 [2, 4] の解析ではこのことを利用している。我々は強結合系を含むより一般的な問題を取り扱いたい、彼らの仮定、特に一様有界である滑らかな解の存在の仮定を緩めたいという動機から研究を行った。本稿では、定式化をやり直し、より広い条件の下で収束性について議論する。飯田等 [2, 4] の結果は弱結合系に関しては、その解構造がある種の半線形反応拡散系の中に再現されることを示唆するものであった。我々の結果はその考察を拡張するものであり、強く支持するものである。

2 反応拡散系

各個体が活発な状態 (動く状態) と不活発な状態 (動かない状態) の 2 つの内部状態を持ち、居心地や動きやすさに応じてその状態を転換する仮想的な生物種を考えてみよう。頻繁に位置を変える状態とあまり位置を変えない状態の 2 つの状態を切り替えることによって、各地点の居心地に応じた分散率を実現するという同様の考え方が飯田等 [2, 3, 4] により提出されている。その考えは (2) などのような系には適用できないという点や、各個体はどちらの状態であっても位置を変えろという点で我々のアイデアと少し異なる。

次のような性質を持つ仮想的な生物種を考えてみよう。

- (i) 各個体は (見掛け上) 活発な状態 (拡散係数が α) と不活発な状態 (拡散係数が 0) の 2 つの仮想的な状態を持つ。
- (ii) 居心地と動きやすさという環境の状態により、各個体は 2 つの状態を素早く切り替える。

この種の個体数密度を z 、活発な状態と不活発な状態にある個体数密度をそれぞれ u, v とする。このとき、(i) は

$$z = u + v. \quad (4)$$

を意味している。この種の動きは、仮想的な見掛け上の 2 つの状態の平均により表現される。仮定 (ii) についてはより詳しく述べなければならない。不活発な状態が活発な状態に変わる確率は

その場所の居心地に比例しているとする。その場所の居心地を $0 \leq D_1(x, t) \leq \exists M$ と書くことにする。比例定数を μ と書くと、その確率は $0 \leq \mu D_1 \leq 1$ と表される。活発な状態が不活発な状態に変わる確率は $1 - \mu D_1$ であると仮定する。我々はきちんと舗装された道や運動場などでは速く走ることができるが、岩だらけの場所や草が多い茂っている場所では動きが取りにくい。そのようなその場所での動きやすさというものも考慮しよう。その場所での各個体の動きやすさは見掛け上の状態の転換に直接影響を与えるものとする。その場所での動きやすさを $D_2(x, t)$ と書く。 D_2 が正の場所では動きやすく、負の場所では動きにくいものとする。状態転換にかかる平均的な時間を $\varepsilon > 0$ と書くことにする。このとき、それぞれの状態にある個体数密度の変化は次のように与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} (\mu D_1 v - (1 - \mu D_1) u + \nu D_2), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} (\mu D_1 v - (1 - \mu D_1) u + \nu D_2). \end{cases} \quad (5)$$

式 (4) と (5) から、この種の個体数密度の変化は次のように与えられる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \Delta u. \quad (6)$$

これは、この種の拡散は 2 つの状態の拡散の平均として実現されることを意味している。

各個体は 2 つの状態を素早く切り替えるので、 ε は十分に小さい必要がある。それが小さくなったときの極限を考えてみよう。式 (5) において $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、形式的に次の関係が得られる。

$$u = \mu D_1 z + \nu D_2.$$

式 (6) に代入すると、

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \Delta [\alpha \mu D_1 z + \alpha \nu D_2]. \quad (7)$$

が得られる。これは、場所の居心地や動きやすさに応じた分散率に従って移動する、ある種の‘生物的拡散’のモデルである ([11] などを参照せよ)。系 (5) では環境に応じて各個体が 2 つの状態を転換するのに対して、式 (7) では環境に応じて分散率が変わっていることに注目したい。上記の形式的な計算はこれらの 2 つの問題が相互に関連しており、(7) における直接的な動きが (5) における反応と拡散の相互作用によって表現され得ることを示している。

定数 α と ν は適当な定数であったため、 $\alpha^{-1} = \nu = \mu$ と選ぶことにする。係数を $D_1 = a_1, D_2 = b_{12} z_2, D_1 = a_2, D_2 = b_{21} z_1$ と選ぶと、式 (7) のタイプの系は交差拡散系 (2) と (反応項を除いて) 一致する。係数を $D_1 = a_1 + b_1 z_1 + c_1 z_2, D_2 = 0, D_1 = a_2 + b_2 z_2 + c_2 z_1, D_2 = 0$ と選ぶと、(7) の種の系は重定-川崎-寺本モデル (3) と一致する。このような場合、(5) から得られる対応する系は (2) や (3) の近似とみなすことができる。従って、これは反応と拡散の相互作用によって交差拡散のメカニズムを捉えることができることを示唆している。

上記の例のように、 D_1 や D_2 は密度に依存してもよいので、より一般的に、 z と $D_1 z + D_2$ を z と $\beta(z)$ にそれぞれ置き換えよう。すると、交差拡散系 (1) の近似として次の半線形反応拡散系

が得られる.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{u} - \mu \beta(\mathbf{u} + \mathbf{v})) + \mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{u} - \mu \beta(\mathbf{u} + \mathbf{v})) & \text{in } Q \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon, \quad \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0^\varepsilon & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

ここで, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ である.

密度 v_i の拡散係数, つまり 0, は分散の最小値を表し, パラメータ μ は分散の最大値を制御しているように思われる. 実際に, 退化放物型問題に対しては μ にそのような条件を課している. しかし, 本稿で扱う交差拡散系に対しての解析では後に述べる条件 (H5) は証明のための条件であり, その意味付けはできていない.

関数 \mathbf{f} は $\mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ なる 2 つの関数 \mathbf{g} と \mathbf{h} に分けることもできる ([2] を参照せよ). しかし, これは解析をする上では本質的ではない.

拡散の非線形性や交差性を取り除くという動機からの反応拡散系 (8) の構成方法が [7, 8] に報告されている. この考えは応用を見据えた上で重要である. 拡散の非線形性 β がそのままの形で反応拡散系 (8) の反応項の部分に含まれていることに注目されたい. 一般に, 非線形問題を扱うよりも半線形問題を取り扱う方が容易である. したがって, 反応拡散系近似に関する理論は非線形問題の解析や数値解析に応用できることが期待される. 実際に, 反応拡散系 (8) を用いて, 退化放物型問題に対して効率的に数値解を求めることができる数値解法を構成し, 解析することができる [9]. 退化放物型問題は拡散の退化性のために, 解が不連続になるなど, 数値的に取り扱いにくい性質を持っている. 系 (8) では 1 つの方程式を 1 つの偏微分方程式と 1 つの常微分方程式により近似している. そこから得られた数値解法を用いると, 解の不連続性など非線形拡散の扱いにくい部分を計算コストが少なく, 空間的な制約のない常微分方程式の計算に置き換えることができ, 効率的に数値解を得ることができる. また, 非線形交差拡散系の数値解法はそれぞれの問題ごとに構成され, 解析されるのが現状であるが, 反応拡散系 (8) を用いることにより, 一般的な問題 (1) に適用できる汎用的で簡便な数値解法を得ることができる.

3 主要結果

本節では, 反応拡散系 (8) の収束性に関する我々の結果について述べる. 次の条件を仮定する.

(H1) $\beta : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ はリプシッツ連続関数であり, $\beta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を満たす.

(H2)' ある正の定数 a が存在して, ほとんど全ての $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ に対して次を満たす.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\beta_i)_j(\boldsymbol{\eta}) \xi_i \xi_j \geq a |\boldsymbol{\xi}|^2.$$

(H3) \mathbf{f} はリプシッツ連続関数である.

(H4) $z_0 \in L^2(\Omega)^n$, $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)^n$ and $v_0^\varepsilon \in H^1(\Omega)^n$ はある ε に依存しない正定数 C に対して次を満たす.

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} + \sqrt{\varepsilon} \|v_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)^n} \leq C,$$

$$\mu u_0^\varepsilon + v_0^\varepsilon \rightharpoonup z_0 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega)^n.$$

初期値 $z_0 \in L^2(\Omega)^n$ に対して, $u_0^\varepsilon = z_0$, $v_0^\varepsilon = 0$ と選ぶことができる. u^ε は $\mu\beta(z)$ の近似であり, v^ε は $z - \mu\beta(z)$ の近似であるため, 初期値に対してもそのように選びたいかもしれない. その場合は u_0^ε と v_0^ε をそれぞれ $\mu\beta(z_0)$ と $z_0 - \mu\beta(z_0)$ の近似としてとればよい. 実際, 任意の関数 $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対して, $\sqrt{\varepsilon} \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)^n} \leq C$ と $\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi$ in $L^2(\Omega)$ を満たす列 $\{\varphi^\varepsilon\} \subset H^1(\Omega)$ が存在する.

条件 (H1) と (H2)' は問題が一様放物型であることを意味している. 係数が

$$a_i > 0, 8b_1c_2 > c_1^2, 8b_2c_1 > c_2^2.$$

を満たし, 解が非負で有界であるとき, 交差拡散系 (3) は一様放物型である. 一様放物型でなくても, 係数が

$$a_i > 0, b_i, c_2 \geq 0, c_1 = 0$$

を満たしている場合, つまり弱結合系の場合にも, 同様に (3) を取り扱うことができる.

我々はどちらの場合も含むさらに一般的な問題を考える. 拡散行列がブロック三角行列であり, 対角ブロックが上記と同じような構造をもつ問題を扱う. 次のような記法を用いる.

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{m_l},$$

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \dots, z_n) = (z_{11}, \dots, z_{1m_1}, z_{21}, \dots, z_{2m_2}, \dots, z_{l1}, \dots, z_{lm_l}), \\ \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m_1}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2m_2}, \dots, \beta_{l1}, \dots, \beta_{lm_l}). \end{aligned} \quad (9)$$

仮定 (H2)' の代わりに β に対して次の仮定を課し, μ に対して (H5) を課す.

(H2) 各 $i = 1, \dots, l-1, j = 1, \dots, m_i$ に対して, 関数 β_{ij} は rs ($r > i, s = 1, \dots, m_r$) 番目の変数に依存していない. さらに, 全ての $i = 1, \dots, l$ とほとんど全ての $\eta, \xi \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m_i} \sum_{s=1}^{m_i} (\beta_{ij})_{is}(\eta) \xi_{ij} \xi_{is} \geq a|\xi|^2$$

を満たす正の定数 a が存在する.

(H5) μ は次を満たす.

$$0 < \mu < 4 \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a / \left(n \sum_{j=1}^n \operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathbf{R}^n} (\phi_j)_i(s)^2 \right) \right\}.$$

ここで, $\phi_i(z) = \beta_i(z) - az_i$ と定義している.

本研究では, このような弱い仮定をおいているため, 古典解ではなく, 弱解を取り扱う. 弱解の定義については村川 [7, 10]などを参照せよ. 仮定 (H1), (H3), (H4) と $\mu > 0$ が成り立つとき,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 反応拡散系 (8) の弱解は一意に存在する. 交差拡散系 (1) の弱解の存在は反応拡散系 (8) を用いて証明することができる.

以下に収束に関する我々の結果を述べる.

定理 1 仮定 (H1)–(H5) が成り立つとする. 反応拡散系 (8) の弱解を $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ とする. このとき, 交差拡散系 (1) の弱解 $z \in (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)^*))^n$ と $\{u^\varepsilon\}, \{v^\varepsilon\}$ の部分列 $\{u^{\varepsilon_k}\}, \{v^{\varepsilon_k}\}$ が存在して, ε_k が 0 に収束するとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon_k} + v^{\varepsilon_k} &\rightarrow z && \text{strongly in } L^2(Q)^n, \text{ a.e. in } Q, \\ &&& \text{and weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega))^n \text{ and } H^1(0, T; H^1(\Omega)^*)^n, \\ u^{\varepsilon_k} &\rightharpoonup \mu\beta(z) && \text{weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega))^n. \end{aligned}$$

この結果は交差拡散系の弱解が反応拡散系 (8) の弱解により近似されることを示している.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (若手研究 (B), 課題番号 19740046) の援助を受けています.

参考文献

- [1] M. E. Gurtin, *Some mathematical models for population dynamics that lead to segregation*, Quart. Appl. Math, **32** (1974), 1–9.
- [2] M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, *Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction*, J. Math. Biol., **53** (2006), 617–641.
- [3] M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, *A significant relation between cross-diffusion and reaction-diffusion*, 数理解析研究所講究録, **1436** (2005), 167–186 (in Japanese).
- [4] M. Iida and H. Ninomiya, *A reaction-diffusion approximation to a cross-diffusion system*, in “Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues” (eds. M. Chipot and H. Ninomiya), World Scientific, (2006), 145–164.
- [5] T. Kadota and K. Kuto, *Positive steady states for a prey-predator model with some nonlinear diffusion terms*, J. Math. Anal. Appl., **323** (2006), 1387–1401.
- [6] E. H. Kerner, *Further considerations on the statistical mechanics of biological associations*, Bull. Math. Biophys., **21** (1959), 217–255.
- [7] H. Murakawa, *Reaction-diffusion system approximation to degenerate parabolic systems*, Nonlinearity, **20** (2007), 2319–2332.
- [8] H. Murakawa, *A solution of nonlinear diffusion problems by semilinear reaction-diffusion systems*, Kybernetika, **45** (2009), 580–590.
- [9] 村川秀樹, 放物型自由境界問題における界面の近似, 数理解析研究所講究録, **1633** (2009), 62–79.

- [10] H. Murakawa, *A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion*, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst. S.
- [11] A. Okubo and S. A. Levin, "Diffusion and ecological problems: modern perspectives. Second edition," Interdisciplinary Applied Mathematics 14, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [12] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theor. Biol., **79** (1979), 83–99.